Das Studium der statistischen Poisson - Verteilung

Ziel des Experiments

Das Gewöhnen der Studenten mit der Anwendung der statistischen Methoden in der Kern- und Teilchenphysik.

Die Theorie des Experiments

Statistik der Elementarprozesse

Ein Radiumkern, der in der nächsten Sekunde zerfallen wird, unterscheidet sich durch nichts von einem, der noch 10000 Jahre leben wird. Allgemein kennt man kein Merkmal, das atomare Einzelakte, wie einen Kernzerfall oder den Übergang eines H-Atoms von einem stationären Zustand in den anderen, vorauszusagen gestattet. Die meisten Physiker glauben sogar mit *J. von Neumann,* dies liege nicht nur an unserem unzureichenden Einblick, sondern es könne prinzipiell keine solchen „verborgenen Parameter" geben, die atomare Einzelakte vorausbestimmen.

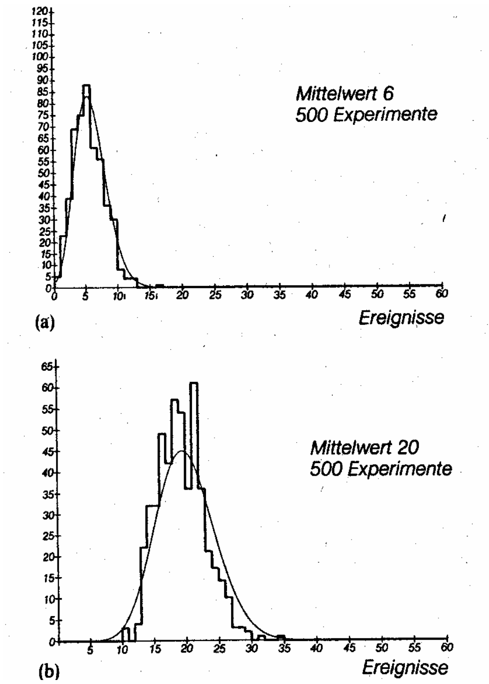
Sehr exakt angeblich ist dagegen die *Wahrscheinlichkeit,* dass ein gegebener Ra-Kern in der nächsten Sekunde zerfällt. Sie ist zahlenmäßig gleich der Zerfallskonstanten k und wird in einer großen Anzahl von Kernen durch die tatsächlich beobachtete relative Häufigkeit der Zerfallsakte beliebig gut angenähert: von N Kernen zerfallen in jeder Sekunde genau XN.

Bei schwachen Präparaten beobachtet man *statistische Schwankungen.* Ein Geigerzähler gibt in einem schwachen Strahlungsfeld ein unregelmäßiges Ticken von sich, ein Szintillationsschirm flackert bald hier, bald dort, unregelmäßig auf. Nur über sehr lange Zeiten erhält man einen konstanten Mittelwert der *Zählrate a,* d.h. der Anzahl von Impulsen geteilt durch die Beobachtungszeit, meist in Minuten ausgedrückt.

Jede Folge von Ereignissen, die völlig unabhängig voneinander sind, und deren jedes im einfachsten Fall eine zeitenabhängige Wahrscheinlichkeit für sein Eintreten hat, muss solche Schwankungen zeigen. Man beobachte einen Geiger-Zähler jeweils eine Minute lang und notiere die Impulsanzahl; je öfter man dies wiederholt, desto genauer findet man im Durchschnitt den Wert a. Es kommen aber auch Minuten mit stark abweichender Impulszahl vor, wenn auch um so seltener, je größer die

Abweichung ist. Die Häufigkeit der verschiedenen Impulszahlen wird durch die *Poisson-Verteilung* beschrieben: Unter Z Versuchen findet man z mal die Impulszahl x, wobei

$$z_x = Z \frac{a^x}{x!} e^{-a}$$



Poisson-Verteilung von Zählrohr-Impuls-Raten. Abszisse: Anzahl der Impulse innerhalb der Messzeit (a) 18s, (b) 1Min.; Ordinate: Anzahl der Messzeiten, welche die jeweilige Impulszahl liefern. Die Impulsrate ist typisch für die natürliche Hintergrundstrahlung (kosmische Strahlung, atmosphärische und Bodenaktivität)

Dieses Gesetz folgt aus Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen ganz allgemein für unabhängige, d.h. zeitlich, räumlich oder sonst wie *statistisch verteilte* Ereignisse. Die *mittlere Schwankung* oder *Standard-Abweichung* ist diejenige Abweichung, die nur bei einem Bruchteil $e^{-1} \approx 0{,}37$ der Versuche überschritten wird. Sie entspricht ungefähr den Wendepunkten der Verteilungskurve. Für die Poisson-Verteilung gilt

$$\Delta x = \sqrt{a}$$

oder für die relative Abweichung

$$\frac{\Delta x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Zählt man im Durchschnitt 100 Impulse pro Minute, so sind Minuten mit weniger als 90 oder mehr als 110 Impulsen ziemlich selten (Wahrscheinlichkeit 37 %).

Die experimentelle Vorrichtung

Die Montage enthält einen Szintillationsdetektor, der an einem elektronischen Zähler NUMEPORT 537A angeschlossen ist.

Anweisungen für die Verwendung des elektronischen Zählers

Auf dem frontalen Steuerungsfeld gibt es vier Umschalter: VERSORGUNG, IMPULSE, EINZELZYKLUS, STOP.

Man schaltet den STOP- Schalter auf T - Zeit,

Den EINZELZYKLUS-Schalter auf 2 - der einer Pause von zwei Sekunden zwischen den nacheinander folgenden Eintragungen entspricht,

Den IMPULSE-Schalter auf 2 - die Sekundenzahl, in der die Eintragung gemacht wird.

Man versorgt den Zähler von dem Stromnetz und man schaltet den Versorgungs-Schalter auf ARBEIT um. Die Impulszahl wird elektronisch in dem Impuls-Kasten und die entsprechende Zeit in dem Sekunden-Kasten erscheinen.

Unter diesen Bedingungen trägt der Zähler die entdeckte Impulszahl für zwei Sekunden ein und die Start-Lampe ist angeschaltet, danach zeigt er diese Zahl für zwei Sekunden (die Start-Lampe ist ausgeschaltet), löscht die vorige Eintragung und startet automatisch eine neue Eintragung.

Arbeitsweise

Man stellt eine Tabelle auf, in der man auf der Linie die gezeigte Zahl der Impulse $x_{i,}$ nach zwei Sekunden betrachtet; auf der Spalte markiert man die Erscheinung der Zahl der Impulse, die für jede nacheinander folgende Eintragung entsprechend (angemessen) gezeigt ist.

Gemäß Empfehlungen müssen die gezeigten Werte x_i zwischen 0 und 20 sein. Wenn die Zahl der aufgenommenen Impulse größer als 20 ist, erhöht man die Empfindlichkeitsgrenze des Zählers.

Die Verarbeitung der experimentellen Daten

Man stellt eine Tabelle auf, wie folgt:

x_i	$K_e(x_i)$	$x_i K_e(x_i)$	$P(x_i)$	$K_c(x_i)$	$K_e(x_i)$ - $K_c(x_i)$	$\frac{[K_e(x_i) - K_c(x_i)]^2}{K_c(x_i)}$
x_i ... $x_{n'}$	....	....	....	....	....	....
Summe	N	Σ				χ^2

In der ersten Spalte sind die Zahlen der erhaltenen Impulse x, die verschieden sind, und in der zweiten Spalte sind die experimentellen Erscheinungshäufigkeiten $K_e(x_i)$ eingetragen; die $K_e(x_i)$ sind mit Hilfe der Daten, die in der ersten Tabelle eingetragen wurden, berechnet. Die Summe der Werte $K_e(x_i)$ stellt die Gesamtzahl N der eingetragenen Messungen dar. Die Summe Σ der Werte $x_i K_e(x_i)$ aus der dritten Spalte dient zur Bestimmung des Schätzers vom Parameter a, mit der Beziehung

$$Scha = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n'} x_i \cdot K_e(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n'} x_i \cdot K_e(x_i)}{\sum_{i=1}^{n'} K_e(x_i)}$$

In der vierten Spalte sind die Werte der Poisson - Wahrscheinlichkeiten $P(x_i)$ eingetragen, die gemäß der Beziehung

$$P(x) = e^{-a} \cdot \frac{a^x}{x!}$$

in welche, der Parameter a durch seinen Schätzer $\bar{x}$ ersetzt ist, berechnet sind. Diese Werte werden aus der Tabelle mit Poisson - Wahrscheinlichkeiten genommen (siehe Anhang).

Die nächste Spalte enthält die Erscheinungs-Wahrscheinlichkeiten $K_c(x_i)$, die man mit Hilfe der Beziehung

$$K_c(x) = P(x) \cdot N$$

mit einer Genauigkeit von einer einzigen Dezimale berechnet und die man mit dem ganzen Wert, durch die entsprechende Abrundung, annährend schätzt.

Um die Größe $\chi^{\square}$ zu berechnen, ergänzt man die letzten zwei Spalten und die Summe der Werte, die in der letzten Spalte enthalten sind, stellt den χ^2 - Wert dar. Mit Hilfe des erhaltenen Wertes χ^2 und der Zahl $n = n' - 1$, berechnet man $P(\chi^2, n)$ von der Wertetabelle der Wahrscheinlichkeiten (siehe Anhang I-Wert der Wahrscheinlichkeit $P(\chi^2, n)$).

Danach zeichnet man auf Millimeterpapier in demselben Diagramm, eventuell mit verschiedenen Farben, das theoretische und das experimentelle Histogramm; auf der Abszisse betrachtet man die Zahl der Impulse x_i, und auf der Ordinate die berechneten $K_c(x_i)$ und die experimentale $K_c(x_i)$ Erscheinungshäufigkeiten.

Das Referat über die Arbeit wird eine Zusammenfassung der Theorie, die zweite Tabelle, die graphische Darstellung mit den zwei Histogrammen und den Wert der Wahrscheinlichkeit $P(\chi^2, n)$ enthalten.

Bemerkungen:

Der χ^2-Anpassungstest ist eine statistische Hauptmethode, mit derer Hilfe man überprüfen kann, ob eine Verteilung eine Poisson - Verteilung ist, da dieser Test schnell anwendbar und einfach in der automatisch durchgeführten Berechnung zu gestalten ist.

Weil es zwischen den Poisson-, Gauss- und Bernoulli-Verteilungen unmittelbare Verbindungsbeziehungen, aufgrund der Sticlangsche Formel erhalten, gibt, kann man die statistischen Methoden zur Überprüfung solcher Verteilungen, durch die Ergebnisausweitung dieser Arbeit, ausarbeiten.

Da diese Verteilung in der Informatik, in der mathematische Statistik, in der Gestaltung der wirtschaftlichen und technischen Verfahren die meist verwendete ist, weitet sich die Bedeutung dieser Arbeit außerhalb der Physikalischenstudien aus.

Anhang I - Wert der Wahrscheinlichkeit P(χ^2, n)

Bemerkung:

Man muss die $P(\chi^2, n)$ Werte aus der Tabelle mit 10^{-4} multiplizieren, um die richtigen $P(\chi^2, n)$ Werte zu erhalten.

χ^2	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10	N=11	N=12	N=13	N=14	N=15
1	9856	9348	9982	9994	9998	9999	10000	10000	10000	10000
2	9197	9598	9810	9915	9963	9985	9994	9998	9999	10000
3	8088	8850	9344	9643	9814	9907	9955	9979	9991	9996
4	6767	7798	8571	9114	9473	9699	9834	9912	9955	9977
5	5438	6600	7576	8343	8912	9312	9580	9752	9858	9921
6	4232	5398	6472	7399	8153	8734	9161	9462	9665	9797
7	3208	4289	5366	6371	7254	7991	8576	9022	9347	9576
8	2381	3326	4335	5341	6288	7133	7851	8436	8893	9238
9	1736	2527	3423	4373	5321	6219	7029	7729	8311	8775
10	1247	1886	2650	3505	4405	5304	6160	6939	7622	8197
11	884	1386	2017	2757	3575	4433	5289	6108	6860	7526
12	620	1006	1512	2133	2851	3626	4457	5276	6063	6790
13	430	721	1119	1626	2237	2933	3690	4478	5265	6023
14	296	512	818	1223	1730	2330	3007	3738	4497	5255
15	203	360	591	909	1321	1825	2414	3074	3782	4514
16	138	251	424	669	996	1411	1912	2491	3134	3821
17	93	174	301	487	744	1079	1496	1993	2562	3189
18	62	120	212	352	550	816	1157	1575	2068	2627
19	42	82	149	252	403	611	885	1231	1649	2137
20	28	56	103	179	293	453	671	952	1301	1719
21	18	38	71	126	211	334	504	729	1016	1368
22	12	25	49	89	151	244	375	554	786	1078
23	8	17	34	62	107	177	277	417	603	841
24	5	11	23	43	76	127	203	311	458	651
25	3	8	16	30	53	91	148	231	346	499
26	2	5	10	20	37	65	107	170	259	380
27	1	3	7	14	26	46	77	124	193	287
28	1	2	5	10	18	32	55	90	142	216
29	1	1	3	6	12	23	39	65	104	161
30	0	1	2	4	9	16	28	47	76	119

Anhang II – Poisson-Verteilungen

<u>Bemerkung</u>: Man muss die P(x)-Werte aus der Tabelle mit 10^{-4} multiplizieren, um die richtigen P(x)-Werte zu erhalten.

x	a=5,0	a=5,1	a=5,2	a=5,3	a=5,4	a=5,5	a=5,6	a=5,7	a=5,8	a=5,9
0	67	61	55	50	45	41	37	33	30	27
1	337	311	287	264	244	225	267	191	176	162
2	842	793	746	701	658	618	580	543	509	477
3	1404	1348	1293	1238	1185	1133	1082	1033	984	938
4	1755	1718	1681	1641	1600	1558	1515	1472	1427	1383
5	1755	1753	1748	1739	1728	1714	1697	1678	1656	1632
6	1462	1490	1515	1537	1555	1571	1584	1594	1601	1605
7	1044	1085	1125	1163	1200	1234	1267	1298	1326	1353
8	653	692	731	771	810	849	887	925	962	998
9	363	392	423	454	486	519	552	586	620	654
10	181	200	220	240	262	285	309	334	359	386
11	82	93	104	116	129	143	157	173	189	207
12	34	39	45	51	58	65	73	82	92	102
13	13	15	18	21	24	28	32	36	41	46

x	a=6,0	a=6,1	a=6,2	a=6,3	a=6,4	a=6,5	a=6,6	a=6,7	a=6,8	a=6,9
0	25	22	20	18	17	15	14	12	11	10
1	149	137	126	116	106	98	90	82	76	69
2	446	417	390	364	340	318	296	276	257	240
3	892	848	806	765	726	688	652	617	584	552
4	1338	1294	1249	1205	1161	1118	1075	1033	992	952
5	1606	1579	1549	1519	1487	1454	1420	1385	1349	1313
6	1606	1604	1601	1595	1586	1575	1562	1546	1529	1510
7	1377	1398	1418	1435	1450	1462	1472	1480	1486	1489
8	1032	1066	1099	1130	1160	1188	1215	1240	1263	1284
9	688	723	757	791	825	858	891	923	954	984
10	413	441	469	468	528	558	588	618	649	679
11	225	244	264	285	307	329	353	377	401	426
12	113	124	137	150	164	178	194	210	227	245
13	52	58	65	73	81	89	98	108	119	130

x	a=7,0	a=7,1	a=7,2	a=7,3	a=7,4	a=7,5	a=7,6	a=7,7	a=7,8	a=7,9
1	64	58	54	49	45	41	38	35	32	30
2	223	208	193	180	167	155	144	134	134	115
3	521	492	464	438	413	389	366	344	324	305
4	912	874	836	799	764	729	696	663	632	602
5	277	1240	1204	1167	1130	1094	1957	1021	986	951
6	1490	1468	1444	1420	1394	1367	1340	1311	1281	1252
7	1490	1489	1486	1481	1474	1465	1454	1442	1428	1413
8	1304	1321	1337	1351	1363	1372	1381	1388	1392	1395
9	1014	1042	1070	1096	1121	1144	1166	1187	1207	1224
10	710	740	770	800	829	858	887	914	941	967
11	452	478	504	531	558	585	612	640	667	695
12	263	283	302	323	344	366	388	411	434	457
13	142	154	167	181	196	211	226	243	260	278
14	71	78	86	94	103	113	123	134	145	157
15	33	37	41	46	51	56	62	69	75	83
16	14	16	19	21	24	26	30	33	38	41

x	a=8,0	a=8,1	a=8,2	a=8,3	a=8,4	a=8,5	a=8,6	a=8,7	a=8,8	a=8,9
1	27	24	22	21	19	17	16	14	13	12
2	107	99	92	86	79	73	68	63	58	54
3	286	267	252	237	222	208	195	182	171	160
4	572	544	517	491	466	442	420	398	377	356
5	916	882	848	816	784	752	722	692	663	634
6	1221	1191	1160	1128	1097	1066	1034	1003	972	941
7	1396	1378	1358	1338	1316	1294	1271	1247	1222	1197
8	1396	1395	1392	1388	1382	1375	1366	1356	1344	1331
9	1240	1255	1269	1280	1290	1299	1305	1311	1314	1317
10	993	1017	1040	1062	1084	1104	1123	1140	1157	1172
11	722	749	775	802	828	853	878	902	925	948
12	481	505	530	554	579	604	629	654	679	703
13	296	315	334	354	374	395	416	438	459	481
14	169	182	196	210	224	239	255	272	289	306
15	90	98	107	116	126	136	146	158	169	182
16	45	50	55	60	66	72	79	86	93	101
17	22	24	26	29	33	36	40	44	48	53
18	9	11	12	13	15	17	19	21	23	26
19	4	4	5	6	7	8	8	10	11	12
20	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5

x	a=9,1	a=9,2	a=9,3	a=9,4	a=9,5	a=9,6	a=9,7	a=9,8	a=9,9	a=10
2	46	43	39	36	34	31	29	27	24	23
3	140	131	122	114	107	100	93	87	81	76
4	319	302	285	269	254	240	226	213	201	189
5	581	555	530	506	483	460	438	418	398	378
6	881	851	821	793	764	736	709	682	656	630
7	1445	1118	1091	1064	1037	1010	982	955	928	901
8	1302	1236	1269	1251	1232	1212	1191	1170	1148	1125
9	1317	1315	1311	1306	1300	1292	1284	1274	1263	1251
10	1198	1209	1219	1228	1235	1241	1245	1248	1250	1251
11	991	1011	1031	1049	1067	1088	1098	1112	1125	1137
12	752	775	799	822	844	866	888	908	928	948
13	526	549	572	594	617	639	662	685	707	729
14	342	361	380	399	419	439	459	479	500	521
15	207	221	235	250	265	281	297	313	330	347
16	119	127	137	147	157	168	180	192	204	217
17	63	69	75	81	88	95	103	110	119	128
18	32	35	39	42	46	51	55	60	65	71

x	a=10,1	a=10,2	a=10,3	a=10,4	a=10,5	a=10,6	a=10,7	a=10,8	a=10,9	a=11
3	70	66	61	57	53	49	46	43	40	37
4	178	168	158	148	139	131	123	116	108	102
5	360	342	325	308	293	278	263	250	237	224
6	606	581	558	535	512	491	470	450	430	411
7	834	847	821	794	769	743	718	694	669	646
8	1103	1080	1057	1033	1009	985	961	936	912	888
9	1235	1224	1209	1193	1177	1160	1142	1124	1105	1135
10	1250	1249	1245	1241	1236	1230	1222	1214	1204	1194
11	1143	1158	1166	1174	1180	1185	1189	1191	1193	1194
12	966	984	1001	1017	1032	1047	1060	1072	1084	1094
13	751	772	793	814	834	853	872	891	909	926
14	541	562	583	604	625	646	667	687	707	727
15	368	382	401	419	438	457	476	495	514	533
16	230	244	258	272	287	302	318	334	350	369
17	137	146	156	167	177	188	200	212	224	237
18	77	83	89	96	103	111	119	127	136	145
19	41	44	48	53	57	62	67	72	78	84

x	a=11,1	a=11,2	a=11,3	a=11,4	a=11,5	a=11,6	a=11,7	a=11,8	a=11,9	a=12
4	95	90	84	79	73	69	65	61	57	53
5	212	201	190	180	170	160	151	143	135	127
6	392	375	358	341	325	310	295	281	268	255
7	622	600	577	556	535	514	494	474	455	437
8	864	840	816	792	768	745	722	700	677	655
9	1065	1045	1024	1003	982	961	939	917	895	874
10	1182	1170	1157	1144	1129	1114	1099	1082	1065	1048
11	1193	1192	1189	1185	1181	1175	1168	1161	1153	1144
12	1104	1112	1119	1126	1131	1136	1139	1143	1143	1144
13	942	958	973	987	1000	1013	1025	1036	1046	1056
14	747	766	785	804	822	840	857	873	889	904
15	553	572	592	611	630	649	668	687	705	724
16	384	401	418	435	453	471	489	507	525	543
17	250	264	278	292	306	321	336	352	367	383
18	154	164	174	185	196	207	219	231	243	255
19	90	97	104	111	118	126	135	143	152	161
20	50	54	58	63	68	73	79	84	90	97
21	26	29	31	34	37	40	44	47	51	55

x	a=12,1	a=12,2	a=12,3	a=12,4	a=12,5	a=12,6	a=12,7	a=12,8	a=12,9	a=13
4	50	46	43	40	38	35	33	31	29	27
5	120	113	107	101	95	89	84	79	74	70
6	242	230	219	208	197	187	178	168	160	151
7	419	401	385	368	352	337	322	308	295	281
8	633	612	591	571	551	531	512	493	475	457
9	852	830	808	787	765	744	723	102	681	660
10	1031	1013	994	975	956	937	918	898	878	859
11	1134	1123	1112	1099	1087	1073	1060	1045	1030	1015
12	1143	1142	1139	1136	1132	1127	1121	1115	1107	1099
13	1064	1071	1078	1084	1089	1092	1095	1098	1099	1099
14	920	934	947	960	972	983	994	1004	1013	1021
15	742	759	777	793	810	826	841	856	871	885
16	561	579	597	615	633	650	668	685	702	719
17	399	415	432	448	465	482	499	516	533	550
18	268	282	295	309	323	337	352	367	382	397
19	171	181	191	202	212	224	235	247	259	272
20	103	110	117	125	133	141	149	158	167	176
21	59	64	69	74	79	84	90	96	103	109
22	33	35	38	42	45	48	52	56	60	64

x	a=13,1	a=13,2	a=13,3	a=13,4	a=13,5	a=13,6	a=13,7	a=13,8	a=13,9	a=14
5	66	62	58	54	51	48	45	42	40	37
6	143	136	129	122	115	109	103	97	92	87
7	269	256	244	233	222	212	202	192	183	174
8	440	423	407	391	375	360	345	331	318	304
9	640	620	601	582	563	544	526	508	490	473
10	839	819	799	779	759	740	720	701	682	663
11	999	983	966	949	932	915	897	879	862	843
12	1090	1081	1071	1060	1049	1037	1024	1011	998	934
13	1099	1098	1096	1093	1089	1084	1079	1074	1067	1060
14	1028	1035	1041	1050	1050	1054	1056	1058	1059	1060
15	898	911	923	934	945	955	965	974	982	989
16	735	751	767	782	797	812	826	840	853	865
17	567	583	600	617	633	650	666	682	697	713
18	412	428	443	459	475	491	507	523	538	554
19	284	297	310	324	337	351	365	380	394	408
20	186	196	206	217	228	239	250	262	274	286
21	116	123	131	138	146	155	163	172	181	191
22	69	74	79	84	90	96	102	108	114	121

x	a=14,1	a=14,2	a=14,3	a=14,4	a=14,5	a=14,6	a=14,7	a=14,8	a=14,9	a=15
6	82	77	76	69	65	61	58	54	51	48
7	165	157	149	142	135	128	121	115	109	104
8	291	279	267	255	244	234	223	213	204	194
9	458	440	424	409	394	370	365	351	337	324
10	644	625	607	589	571	553	536	519	502	486
11	825	807	789	771	753	734	716	698	681	663
12	970	955	940	925	909	894	878	861	845	828
13	1052	1043	1034	1025	1014	1003	992	981	969	956
14	1059	1058	1056	1054	1051	1047	1042	1037	1031	1024
15	996	1002	1007	1012	1016	1019	1021	1023	1024	1024
16	878	889	900	910	920	930	938	946	954	960
17	728	743	757	771	785	798	811	824	836	847
18	570	586	601	617	632	648	662	677	692	706
19	432	438	453	468	483	498	513	528	542	557
20	298	311	324	337	350	363	377	390	404	418
21	200	210	220	231	242	252	264	275	287	299
22	128	136	143	151	159	168	176	185	194	204
23	79	84	89	95	100	106	113	119	126	133
24	46	49	53	57	61	65	69	74	78	83