Studium der optimalen Bedingungen
für die Messung der Kernstrahlungen

Ziel des Experiments

Die Arbeit verfolgt, dass sich die Studenten die Berechnung der spezifischen Fehler bei Nuklearphysikmessungen aneignen und zugleich die Arbeitsweise, die zur Minimalisierung dieser Fehler führt.

Die Theorie des Experiments

Die radioaktive Kernspaltung ist ein zufälliges Phänomen, dessen Entstehungswahrscheinlichkeit vom Stabilitätsgrad des betreffenden Atoms abhängt. Die Spaltung einer großen Anzahl von Kernen eines radioaktiven Isotops ist ein statistisches Phänomen. Die Fluktuation der Anzahl der Kerne, die sich in zeitlich gleichen Intervallen spalten, ist der mathematischen Statistik untergeordnet. Dies erlaubt das Berechnen jener Bedingungen, die für die Wahl der experimentellen Bedingungen, die dem Ergebnis die gewünschte Genauigkeit sichern, notwendig sind.

Die Spaltungen einer radioaktiven Quelle werden mit Hilfe eines Teilchendetektors, der mit einem elektronischen Impulszähler verbunden ist, gemessen. Die Anzahl der Impulse, die vom Zähler in einem gegebenen Zeitintervall gemessen wird, ist proportional mit der totalen Anzahl der Spaltungen in der Quellenmasse in dem gegebenen Zeitintervall.

Es werden n Bemerkungen gemacht, jede im Zeitintervall t und man erhält die Impulse R_1, R_2,... R_i,... R_n.. Der Mittelwert der Anzahl der Impulse im Zeitintervall t ist:

$$\overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \tag{1}$$

und die Mittelzahlgeschwindigkeit ist:

$$r = \frac{\overline{R}}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{nt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{t_{Total}} \tag{2}$$

wobei t_{Total} die Totalmessungszeit ist.

In der Voraussetzung, dass die zeitliche Verteilung der Impulse vom Poisson Typ ist, wird die Standardabweichung einer einzigen Beobachtung von folgender Beziehung angegeben:

$$S_R = \sqrt{R} \tag{3}$$

wobei die Standardabweichung des Mittelwertes der Anzahl der Impulse gleich ist mit:

$$S_{\bar{R}} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_i} = \sqrt{\frac{nR}{n^2}} = \sqrt{\frac{\bar{R}}{n}} \tag{4}$$

Aus dem Satz der Entstehung der Fehler ist die Mittelzahlgeschwindigkeit der Standardabweichung gleich mit:

$$S_{\bar{r}} = \frac{S_{\bar{R}}}{t} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{\bar{R}}{n}} = \sqrt{\frac{\bar{R}}{nt^2}} = \sqrt{\frac{\bar{R}}{t \cdot t_{total}}} = \sqrt{\frac{\bar{r}}{t_{total}}} \tag{5}$$

In den meisten Fallen verwendet man in der Praxis die Mittelzahlgeschwindigkeit der Standardabweichung:

$$\varepsilon_{\bar{r}} = \frac{S_{\bar{r}}}{\bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}}\sqrt{\frac{\bar{r}}{t_{total}}} = \sqrt{\frac{\bar{r}}{\bar{r}^2 t_{total}}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{r} \cdot t_{total}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_i}} \tag{6}$$

Jede Messungsoperation wird in Gegenwart von einem Strahlungshintergrund durchgeführt. (kosmische Strahlungen, Erdstrahlungen und andere Strahlungen, die im Labor erzeugt sind).

Die Anzahl der Impulse die im Strahlungshintergrund (Fond) entstehen, kann durch eine entsprechende Veranschaulichung verkleinert werden, doch sie kann auf keinen Fall annulliert werden. Der Hintergrund muss separat berechnet werden, in der Abwesenheit der Quelle, um danach von den Ergebnissen der Messung der Quellenaktivität subtrahiert zu werden. Es sei F die Anzahl der Impulse vom Strahlungsfond in der Zeit t_f. Die entsprechende Zahlgeschwindigkeit ist:

$$f = \frac{F}{t_f} \tag{7}$$

und ihre Standardabweichung ist:

$$S_f = \sqrt{\frac{f}{t_f}} = \frac{1}{t_f}\sqrt{F} \tag{8}$$

Es sei Q die Gesamtanzahl der Impulse, die von der Quelle in der Gegenwart der Hintergrundstrahlung, in der Zeit t_q erzeugt werden; die entsprechende Zahlgeschwindigkeit ist:

$$q = Q/t_q \tag{9}$$

und ihre Standardabweichung ist:

$$S_q = \sqrt{\frac{q}{t_q}} = \frac{1}{t_q}\sqrt{Q} \tag{10}$$

Die Zahlgeschwindigkeit nur für die Quelle ist:

$$r = q - f \tag{11}$$

und ihre Standardabweichung, laut dem Satz der Zusammensetzung der mittleren Quadratabweichungen, ist:

$$S_r^2 = S_q^2 + S_f^2 = \frac{q}{t_q} + \frac{f}{t_f} \tag{12}$$

Es folgt:

$$S_r = \sqrt{\frac{q}{t_q} + \frac{f}{t_f}} \tag{13}$$

In der Voraussetzung dass $t_f = t_q = t$, erhalten wir die Standardabweichung der Zählgeschwindigkeit der Quelle:

$$S_r = \sqrt{\frac{q+f}{t}} = \frac{\sqrt{Q+F}}{t} \tag{14}$$

Für die relative Standardabweichung, laut (11) und (14), folgt:

$$\varepsilon_r = \frac{S_r}{r} = \frac{\sqrt{\frac{q+f}{t}}}{q-f} = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{q+f}}{q-f} = \frac{1}{\sqrt{t-q}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{f}{q}}}{1-\frac{f}{q}} = \frac{1}{\sqrt{Q}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{f}{q}}}{1-\frac{f}{q}} \tag{15}$$

Daraus folgt Q, die Anzahl der Impulse, die für eine bestimmte relative Standardabweichung der Zahlgeschwindigkeit der gemessenen Quelle ist. Q ist auch vom Verhältnis, q/f, abhängig der in der Praxis verwendet wird.

$$Q = \frac{1}{\varepsilon_r^2} \cdot \frac{\frac{q}{f}\left(\frac{q}{f}+1\right)}{\left(\frac{q}{f}-1\right)^2} \tag{16}$$

Oft ist es einfacher die Zählgeschwindigkeit t zu kennen, um eine bestimmte relative Standardabweichung zu erhalten. So folgt aus (9) und (16):

$$t = \frac{Q}{q} = \frac{1}{\varepsilon_r^2} \cdot \frac{q+f}{(q-f)^2} \tag{17}$$

Man verfügt über eine Gesamtzeit T und man verlangt eine vorteilhafte Verteilung zwischen der Zeit t_f für die Messung der Hintergrundstrahlung und der Zeit t_f für die Messung der Quelle in Gegenwart der Hintergrundstrahlung, so dass die Zahlgeschwindigkeit der Standardabweichung für die Quelle minimal ist. Es sei:

$$T = t_q - t_f \tag{18}$$

woraus folgt:

$$t_f = T - t_q$$

und laut (12) folgt:

$$S_r^2 = \frac{q}{t_q} + \frac{f}{T - t_q} \tag{19}$$

Der Minimalwert dieser Abweichung entspricht der Nullsetzung der Ableitung

$$\frac{d\left(S_r^2\right)}{t_q} = \frac{q}{t_q^2} + \frac{f}{(T-tq)^2} = 0 \tag{20}$$

oder: $$\frac{q}{t_q^2} = \frac{f}{t_f^2} \tag{21}$$

woraus folgt:

$$\frac{t_q}{t_f} = \sqrt{\frac{q}{f}} \tag{22}$$

Diese Bedingung wendet man in der Praxis in allen Fallen, wo das Verhältnis q/f groß ist, an. Falls dieses Verhältnis ungefähr gleich der Einheit ist, gilt:

$$t_q = t_f \tag{23}$$

Im Falle der leicht radioaktiven Quellen, ist die Zählgeschwindigkeit r (laut (11)) klein und man stellt sich die Frage ob die Differenz zwischen den beiden

Zählgeschwindigkeiten q und f bedeutend ist. Die Bedingung, dass eine Messung entweder die Quelle in Gegenwart der Hintergrundstrahlung oder der Hintergrundstrahlung alleine, bedeutend sein soll, ist:

$$r \geq 3 \cdot S_r \tag{24}$$

Die experimentelle Vorrichtung

Man verwendet eine radioaktive Quelle und eine einfache Messungskette, die aus einem Szintillationszähler und einem elektronischen Zähler gebildet ist.

Die Ausführung des Experiments und die Bearbeitung der Experimentaldaten

Anfangs füllt man die Tabelle 1 aus.

t (Min.)	F (Imp.)	<F> (Imp.)	f (Imp./s)	<f> (Imp./s)	Q (Imp.)	<Q> (Imp.)	q (Imp./s)	<q> (Imp./s)
1								
2								
5								
10								

Mit Hilfe der obigen Daten füllt man die Tabelle 2 aus, wobei die Werte aus dem Tabellenanfang die Durchschnittswerte aus der Tabelle 1 darstellen und die relative Standardabweichung mit der Formel (15) berechnet wird.

T (Min)	F (Imp.)	f (Imp./s)	Q (Imp.)	q (Imp./s)	R = q –f (Imp./s)	ε_r
1						
2						
5						
10						

I. Man stellt das Graph $\varepsilon_r = f(t)$ dar.

II. Für ε_r = 10% wird die entsprechende Messzeit vom Graph abgelesen, t_{graf}. Für den gleichen Wert der relativen Standardabweichung ε_r = 10% berechnet man die entsprechende Zeit mit Hilfe der Formel (17), $t_{berechnet}$, wobei q und f die arithmetischen Mittelwerte aus den entsprechenden Rubriken der Tabelle 2 sind.

III. Man vergleicht die zwei erhaltenen Werte, falls die zwei Werte bedeutend unterschiedlich sind, man wiederholt (in erster Phase) die Rechungen und dann die Messungen.

IV. Im Falle eines vorhandenen Zeitintervalls von 30 Minuten, um sowohl die Hintergrundstrahlung als auch die Quelle zu speichern, stellt man die Frage wie die Zeit zwischen den zwei Messungen verteilt wird, so dass der Fehler minimal sein soll. Man löst ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (Achtung auf die Umwandlung Minuten-Sekunden).

$$T = t_f + t_q (= 30\,\text{min.})$$

$$\frac{t_q}{t_f} = \sqrt{\frac{q}{f}}$$

wobei q und f die gleichen wie bei $t_{berechnet}$ sind.